AN APPROACH TO DENSITY IN DECIMAL NUMBERS: A STUDY WITH PRE-SERVICE TEACHERS

UN ACERCAMIENTO A LA DENSIDAD EN LOS NÚMEROS DECIMALES: UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN

Mayra Suárez-Rodríguez
Center for Research and Advanced Studies (Cinvestav)
mayra.suarez@cinvestav.mx

Olimpia Figueras
Center for Research and Advanced Studies (Cinvestav)
figuerao@cinvestav.mx

Researchers, who have studied the understanding of the density property in the set of decimal numbers, have shown that the student uses the property of the discrete of natural numbers to solve tasks related to density. So, a restructuring of concepts is necessary, that is, a conceptual change from "the discrete" to "the dense". This report presents evidence from ten pre-service teachers from Mexico City that this change can initiate through the implementation of a didactic sequence. The pre-service teachers managed to visualize that a decimal number can be found in an interval. Consequently, they were able to conceive an infinity. However, several of them persisted with the idea of the existence of a successor in the set of decimal numbers.

Keywords: Teacher training, rational numbers, Concepts of numbers and operations, Mathematical knowledge for teaching

The challenges that students face when solving situations related to the density property of rational numbers have not been an easy process. When a student concludes elementary school, he believes that there is no other number between two decimal numbers. For example, in Argentina, fifth graders (10 years old) think that between 4.2 and 4.3 there is no other decimal (Broitman, Itzcovich & Quaranta, 2003). Ávila (2008) reports that only 10% of students in elementary school answer correctly the exercises of density property raised in the national evaluations in Mexico.

After elementary school, students still have the same thinking about the discrete property of natural numbers during middle school. This can be confirmed in the research carried out by Neuman (1998). He exposes that German seventh graders in elementary education (13 years old) associated common properties with natural numbers to solve questions related to the density of fractions. Hart, in 1981 (as cited in Widjaja, Stacey & Steinle, 2008), stated that between 22% and 39% of students from 12 to 15 years old thought that there were eight, nine or ten decimal numbers between 0.41 and 0.42 (for example, the nine decimal numbers in the order of thousandths: 0.411, 0.412, 0.413, 0.414, 0.415, 0.416, 0.417, 0.418, and 0.419).

The students in college and pre-service teachers are in the last stage of schools. In the United States, future teachers think there is a finite number of intermediate numbers in an interval and a rational number has a successor (Tirosh, Fischbein, Graeber & Wilson, 1999). In Indonesia, half of a population of pre-service teachers considered a finite amount of decimal numbers between two given numbers (Widjaja et al., 2008). Most of the 62 pre-service teachers and more than a tenth of 71 students specialized in mathematics at the university level in Finland used properties corresponding to the natural number system on tasks associated with the density property of fractions (Merenlouto & Lehtinen, 2004).

This problem seems to persist from elementary school therefore the attention was focused on pre-service secondary teachers; in this level the properties of decimal numbers including the density

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

property are studied in more depth. It should mention that this document is an extension of a brief research report presented by Suárez-Rodríguez and Figueras in 2019.

Objectives

Considering the need to overcome the difficulty that a pre-service teacher has about the property of density in the decimal numbers' set, a didactic sequence was proposed (see Suárez-Rodríguez, 2017) to generate a *metaconceptual awareness*. In the process of conceptual change, the student begins to assume a metaconceptual awareness when he is aware that their assumptions and beliefs are hypothetical and limit how you interpret the information you learn (Vosniadou, 1994). Therefore for the present research, the following aims were established: 1. Identify and write explanatory framework — different ways of expressing an individual's interpretations (Vamvakoussi, Vosniadou & Van Dooren, 2013) — that pre-service teachers make about the density property of decimal numbers when they have a metaconceptual awareness, and 2. Analyze the actions of the participants in solving the activities if a conceptual change is promoted.

Theoretical Framework

Carey, in 1987, proposes the cognitive-developmental approach to Conceptual Change, in which she explains how childhood cognition works and develops alternatives to initiate a process of conceptual change. The author points out that the knowledge of an individual's concept, initially, is linked to a *naive theory* (it consists of explanations of innate concepts or concepts learned from everyday experience related to science). An example of a naive theory, or naive idea, in mathematics is one in which the student believes that there are only nine numbers between 1.2 and 1.3, namely: 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28, 1.29 (Suárez-Rodríguez, 2017). Once the knowledge is associated with naive theories, this will be linked with others forming a knowledge system in the student (Carey, 1987).

Vosniadou (1994) proposes that naive theories constitute the *mental models* of the human being and that these models are the first step to initiate a process of conceptual change. For Vosniadou, a mental model is a representation that the student forms about ideas that he or she acquires, either through experience or instruction, and that is accompanied by presuppositions. When a student assumes metaconceptual awareness these models change, the *synthetic models* are produced and represent the students' attempts to reconcile the culturally accepted scientific views with the presuppositions of their naive theories (Vosniadou, 1994). Finally, conceptual change requires changes in the presuppositions and beliefs that the student must make in his representations so that he can access the *scientific concepts*, and thus achieve an understanding of the concepts learned (Vosniadou , 1994; Vosniadou, Vamvakoussi, and Skopeliti, 2008).

In the educational field of mathematics, Stafylidou and Vosniadou (2004) and Vosniadou and Verschaffel (2004) often use explanatory frameworks instead of mental models or synthetic models. The first explanatory frameworks that the student carries out are the first reflections that form a coherent and solid structure about what he learns along with his presuppositions and beliefs (Vosniadou and Verschaffel, 2004). Continuing the idea to these researchers, we can say that the initial explanatory frameworks are the first thoughts a student makes about what he perceives, what he sees, what he plays and explains in his own way, in his words. In the context of a learning process likewise, the expression conceptual change is a process of restructuring concepts when the student is learning information that is not compatible with his knowledge built up to now so the student must make a resignification of concepts. This is how the understanding of the density property involves a process of conceptual change, gradually, a restructuring from "the discreet" to "the dense", as argued by Suárez-Rodríguez and Figueras (2019).

A conceptual change: the restructuring of the discrete to the dense

Ni and Zhou (2005) point out in their research three possible causes that make the student has difficulties to answer tasks associated with rational numbers when he uses knowledge about the natural number. A first cause is related to the innate, that is if the property of the discrete of the set of natural numbers is innate in nature. The second cause is related to the teaching of the properties of the set of natural numbers and the set of rational numbers. And finally, the relationship between student´s learning the concepts and learning the symbology of those concepts. Faced with this, Vamvakoussi and Vosniadou (2012) devised a strategy using the analogy between stretching an "elastic band" and the density property. The student, as he stretches the elastic band, observes that there is more space between "the two points drew"; therefore, there are more "imaginary points". Thus, the students (between 13 and 17 years old) achieved to imagine a similar relationship between the stretch of the garter and the property of density. In the research performed by Vamvakoussi and Vosniadou with 15-year-old students, in 2004, different explanatory frameworks were identified and described, related to a thought linked to finite or infinite quantities of rational numbers in an interval (see Table 1).

Table 1: Characterization of thinking about the quantity number of numbers in an interval

Naive thinking about the discrete	It is thought that there is no other number between two *consecutive false* rational numbers. Vamvakoussi and Vosniadou (2004) created this expression to refer that exists a successor of a rational number.
Advanced thinking about the discrete	It is thought there is a finite quantity of numbers between two consecutive false rational numbers.
Mixed thinking between discrete and dense	In some cases, it is thought that between two rational numbers there is an infinity of numbers; and in other cases, it is thought there is a finite number of intermediate numbers.
Naive thinking about the dense	It is understood that there is an infinity of numbers in an interval, but this situation is not justified by using the density property. The symbolic representation of the extremes of an interval influences the way of thinking; it is believed there can only be an infinite number of decimal numbers between decimals and an infinity of fractions between fractions, but not an infinity of fractions between decimals or otherwise.
Advanced thinking about the dense	There is a sophisticated understanding of the density property; that is, it is understood that there is an infinite number of numbers between two rational numbers, regardless of their symbolic representation and this is justified through the use of the density property.

Methodology

Participants

The population studied was 10 pre-service teachers in mathematics at the secondary basic education of an institution in Mexico City, in 2017. One of these participants was 36 years old and the others were between 18 and 23 years old.

Educational experimentation design

The implementation of the didactic sequence with the pre-service teachers focused on one purpose: to generate metaconceptual awareness. Vamvakoussi and colleagues (2013) indicate that conceptual change through instruction is a slow and gradual process because it not only involves the reorganization of conception but also of the entire knowledge system. However, the authors describe that a conceptual change can be achieved gradually with the following criteria: (a) an in-depth exploration of the concepts to learn, (b) to take into account the student's prior knowledge, (c) to

facilitate a metaconceptual awareness, (d) to provide meaningful experiences, and (e) to encourage the use of various representations, whether graphic, written, or made with digital resources.

Considering the previous criteria and the backgrounds that shape the problem about around the understanding of the density property by the student, we designed and elaborated of the activities of the didactic sequence. The sequence was structured in two stages. The first stage is to recognize the participants' first explanatory frames through a paper and pencil questionnaire (diagnosis) and individual interviews. The second stage was elaborated with individual and group activities to identify and analyze their actions, in turn, their explanatory frameworks. This stage was carried out in four sessions about 1. The perception of the dense in concrete materials. 2. Addition and subtraction of decimals, 3. Localization of decimals in intervals, and 4. Comparing decimal numbers.

Results

Results of the questionnaire as diagnosis (first stage)

The pre-service teachers answered an 11-question questionnaire which showed the first explanatory frameworks related to the categories proposed by Vamvakoussi and Vosniadou (2004) about the property of the discrete and the property of density. Below are the responses of several participants to some questions, as well as some of their comments expressed in the individual interviews to find out the justification for their answers.

Naive thinking about the discreet. Some pre-service teachers considered that the extremes of an interval are consecutive and therefore they assured there cannot another number in this interval. Figure 1 shows the case of Amanda. She carried out the process of a fractional representation to a finite decimal writing, and she argued that both ends of the interval are consecutive.

5. Can you find decimal numbers and or fractions between 0.49 and 1/2? Write your answer.

No porque $\frac{1}{2}$ es 0.5 el siguiente de 0.49

Amanda shows that 1/2 = 0.5 = 0.50 is the successor of 0.49. She mentions in the interview "0.49 and 1/2 are consecutive".

Figure 1: Naive thinking about discrete (example)

Advanced thinking about the discreet. The finite subdivision process in an interval was one of the initial explanatory frameworks the participants operated to confirm the existence of a finite of decimal numbers in a range. The notion that only numbers on the order of tenths — at most hundredths — are decimal numbers may be influenced by responses related to finite sets within an interval. For example, Fabiola evokes a finite process, considering a certain number of decimal places of a number to affirm that there are nine decimal places in the given interval; therefore, the idea of false consecutive numbers underlies (see Figure 2).

2. How many decimal numbers are there between 1.2 and 1.3?

Si nueve

Fabiola wrote that there were 9 numbers in the range. She said there were only 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28, and 1.29 (as she expressed in the interview).

Figure 2: Advanced thinking about discrete (example)

It is worth mentioning that some pre-service teachers have an initial explanatory framework that a successor is a number greater than itself. Perhaps, Isabella thinks the successor of any number is a larger number, as in her example: natural 7, 8 (See Figure 3).

9. What is the successor of the natural number 6?	naturales7, 8...

Figure 3: Belief of the successor's existence as a larger number (example)

To finish this first stage of the didactic sequence, it is concluded that half of the pre-service teachers tend to have combined thinking between the discrete and the dense, while three of them apparently have advanced thinking about the discrete and the rest tend to have naive thought related to the discreet.

Results of the activities of the didactic sequence (second stage)

The following paragraphs describe some actions and explanatory frameworks of the teachers in training who interacted with activities in the didactic sequence.

Performances related to the perception of the dense in concrete materials. The purpose of the first activities of the didactic sequence is that the future teacher conceives the notion of an infinity of numbers in an interval through an "infinity of points" in a geometric context. They reported that the more the elastic band was stretched (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012), there could be more space; therefore, more imaginable points. The same occurs when blowing up a balloon. The participants pointed out that the more the balloon was blown up, the more space there would, be therefore, more imaginary points.

Performances identified with addition and subtraction with decimal numbers. For this second session, participants answered to two activities that emerged from the activities made by Broitman et al. (2003). The objective of the activities is the recognition of skills in writing different decimal numbers. In one of the activities, the teacher-researcher writes the number *1.5* on the board, then the pre-service teacher writes the greatest number of addends and that the total sum approaches or equals 10. Some participants revealed the use of numbers until two decimal places in this first experience, for example, Karen's explanatory framework. She used numbers with two decimal places, even considering the number 0 for the hundredths, as can be seen in Figure 4. Karen only writes down the numbers between 0 and 1. She first writes the sequence *0.5*, *0.4*, *0.3,* and then registers *0.25*, *0.75, 0.80,* and *0.15*; that is, she decomposes to hundredths. Then she writes *0.20*, *0.70*, *0.40,* and *0.30* and recognizes that zero can have the hundredths position. Perhaps she did not perceive the equivalence between 0.3 and 0.30 as well as 0.4 and 0.40 since the activity required different numbers.

1.5 + 0.5 + 0.4 + 0.3 + 0.25 + 0.75 + 0.80 + 0.15 + 0.20 + 0.70 +
0.40 + 0.30 +

Figure 4: Karen's record on the addition and subtraction activity

Nicolás' explanatory framework was based on registering numbers up to six decimal places, but apparently, he had a strategy (see Figure 5). He wrote down the number *0.000001* and then *0.000009*, and in the following rows the position of the digit 9 changes. Nicolás wrote 9 in the position of the millionths, then in the position of the hundred-thousandths, then in the ten-thousandths, the thousandths, the hundredths, and finally, in the tenths. The process that Nicolás followed was to multiply 9 by $1/10^n$, where n is a natural number, starting with the millionth position (that is, $n = 6$). The sum of the numbers that Nicolás wrote is 1. This participant used numbers up to millionths and in the diagnostic questionnaire showed examples related to advanced thinking associated with the discrete. This fact highlights a process of a gradual conceptual change since he recorded numbers with up to two decimal places in some questionnaire responses.

Figure 5: Nicolás' record on the addition and subtraction activity

Performances linked to locating decimal numbers in intervals. The two activities in this session were developed from one made by Brousseau (1981) that seek to locate numbers in an interval, as well as find intervals for a given number. In one of the activities, future teachers should look for the interval in which the number "thought" by a colleague is found and pose questions to find that interval. The ends of this interval must be decimal numbers whose decimal places are consecutive. Figure 6 shows an example of a participant who wrote the intervals his colleagues mentioned and marked with an "X" those that did not correspond. Olga considered the numerical representation until ten-thousandths in the hidden number, 28.9306. She had shown evidence of naive thinking concerning discrete in the development of the diagnostic questionnaire. It seems, that Olga has been doing a restructuring of concepts because she believed there were only numbers up to two decimal places. Perhaps, she used the numerical representation of the order of the ten-thousandths as a consequence of the socialization of the previous activities (related to additions and subtractions).

Performances associated with comparing decimal numbers. The two comparison activities, in the last session of the didactic sequence, are part of a study carried out by Castillo in 2015, in Mexico. Understanding the density property of decimals from the decimal comparison property is the aim of the activities. In one of the activities, each future teacher must complete a decimal numbers' series. Figure 7 shows the work made by that one of the five participants carried out and completed the sequence correctly. His strategy consisted in detailing the last digits of the numbers that appear to "modify" them and, in other cases, to "add digits" without altering the ordering.

Some teachers in training did not perceive the equivalence between decimals, for instance, Olga, Isabella, Oscar, and Amanda (see Figure 8). Olga added a zero in the ten-thousandth position of the number 30,871. Isabella and Olga added two zeros in the hundred-thousandth and millionth positions of the number 30.8712. While Oscar added a zero in the position of one hundred-thousandths of the number 30.8721, and Amanda added a zero to the end of the expression 30.87125.

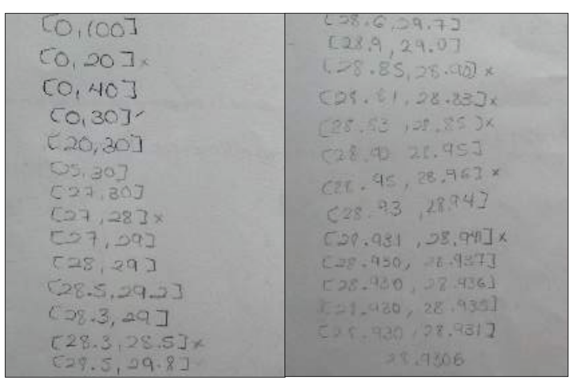

Figure 6: Future teacher's record on the location activity

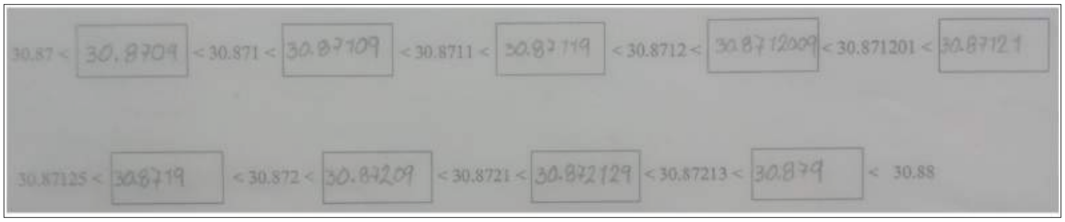

Figure 7: Future teacher's record on the comparison activity

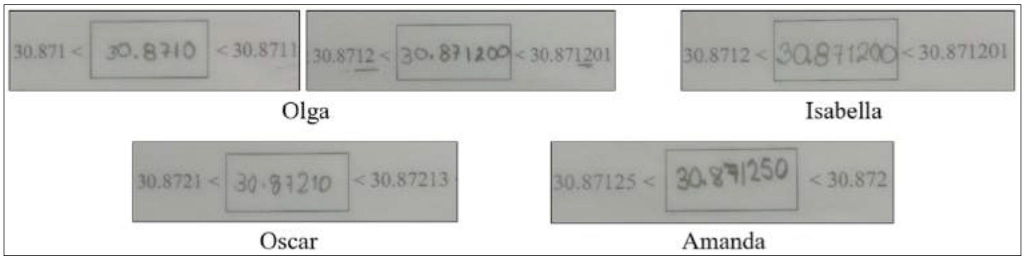

Figure 8: Records of four participants in the comparison activity

After completing the individual test, the future teachers wrote down the numbers written on their worksheets on the board (see Figure 9). In order for the pre-service teacher to achieve a metaconceptual awareness that the property of density helps to visualize the fact that there is no successor in the set of decimal numbers, it was shown that between pairs of false consecutive ones it is found at least a decimal number, therefore an infinity. For example, in Figure 9 (see oval) that observed between the pair of false consecutive *30.8711* and *30.8712* are located the least seven decimal numbers, larger than the first and smaller than the second: *30.87112*, *30.871103*, *30.87119*, *30.871105*, *30.871102*, *30.87115* and *30.871106*

Finally, the teacher-researcher asked the participants if there were other strategies to find intermediate numbers in this activity. Nicolás mentioned "the arithmetic mean". The teacher-researcher accomplished a brief example with a pair of numbers from the activity to show the arithmetic mean helps to find intermediate numbers in an interval.

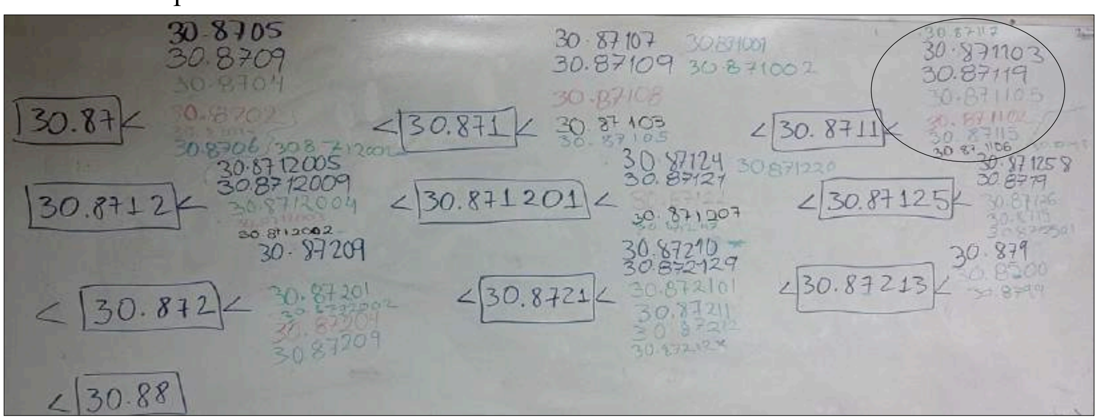

Figure 9: Participants' annotations in the comparison activity

Conclusions and implications

The socialization of the activities of the didactic sequence with the pre-service teachers promotes an approach to the understanding of the density property of the decimal numbers, and, in consequence, a process of conceptual change from the discrete to the dense. In the development of the diagnostic questionnaire, the ten future teachers had evidenced examples of thought associated with the property

of the discrete of natural numbers. During the implementation of the activities of the didactic sequence, the ten participants achieved to extend the number of decimal places, a strategy that allowed them to locate numbers in an interval. However, three future teachers questioned the mediation about the existence of a decimal's successor; they even included in their explanatory framework the existence of a successor to a decimal number as a larger number.

Developing the writing of decimal expansion of a number is considered a task that may help the future teacher, or a student in general, in understanding the series' concept. Sums of arithmetic or geometric progressions with infinite terms are series' examples. A number with periodic decimal writing expresses an approximation of a rational number, which is the limit value of rational, for example, the limit value of the decimal expansion 0.0123123123... is 41/3330. Likewise, the development of writing infinite decimal expansions that cannot be expressed as a fraction could help the student to understand the irrational number' concept. Finally, as indicated by Suárez-Rodríguez and Figueras (2019), the didactic sequence is an example of a teaching model that may be of interest to in-service teachers who could start studying the density property in their classroom's lessons.

Acknowledgments

The research project was funded by Conacyt and Cinvestav. Special thanks to the teachers in training who voluntarily participated in the didactic sequence.

References

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Matemática Educativa, 20*(2), 5-33.

Broitman, C., Itzcovich, H., & Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime*, *6*(1), 5-26.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds. and Trads.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (pp. 149-222).

Carey, S. (1987). *Conceptual change in childhood.* Cambridge, MA: MIT Press.

Castillo, G. (2015). *Concepciones que ponen en juego los docentes en formación cuando planifican sus clases* (Tesis de maestría inédita). Cinvestav, México.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction*, *14*, 519-534.

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Törner, & B. Wollring (Eds), *Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104). Recuperado de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*, 27-52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503-518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Suaréz-Rodríguez, M. (2017). *Acercamientos a la propiedad de densidad de los números decimales: Un estudio con profesores en formación* (Tesis de maestría inédita). Cinvestav, México.

Suárez-Rodríguez, M. & Figueras, O. (2019). Towards a conceptualization of the density property of decimal numbers: a study with teachers in training. In S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the Forty-First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 741-745). St Louis, MO: University of Missouri.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Recuperado de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265-284.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., & Van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 305-321). New York: Routledge.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction, 4*, 45-69.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*, 445-451.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Widjaja, K., Stacey, K., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from Indonesian pre-service teachers. *Journal of Science and Mathematics. Education in Southeast Asia*, *31*(2), 117-131.

UN ACERCAMIENTO A LA DENSIDAD EN LOS NÚMEROS DECIMALES: UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN

AN APPROACH TO DENSITY IN DECIMAL NUMBERS: A STUDY WITH PRE-SERVICE TEACHERS

Mayra Suárez-Rodríguez Olimpia Figueras
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav)
mayra.suarez@cinvestav.mx figuerao@cinvestav.mx

Investigadores que han estudiado la comprensión de la propiedad de densidad en el conjunto de los números decimales han mostrado que el estudiante usa la propiedad de lo discreto de los números naturales para resolver tareas relacionadas con la densidad. Por lo que es necesaria una reestructuración de conceptos, es decir, un cambio conceptual: de "lo discreto" a "lo denso". En este informe se presentan evidencias de diez profesores en formación, de la Ciudad de México, de que se puede iniciar ese cambio a través de la puesta en marcha de una secuencia didáctica. Los profesores en formación lograron visualizar que en un intervalo se puede encontrar un número decimal, en consecuencia, lograron concebir una infinidad. No obstante, varios de ellos persistieron con la idea de la existencia de un sucesor en el conjunto de los números decimales.

Palabras clave: preparación de maestros en formación, números racionales, conceptos de números y operaciones, conocimiento matemático para la enseñanza

Los desafíos que enfrentan los estudiantes para resolver situaciones relacionadas con la propiedad de densidad de los números racionales no han sido un proceso sencillo. Un estudiante que concluye la educación primaria cree que no hay otro número entre dos decimales. Por ejemplo, en Argentina, los estudiantes de 5to de primaria (10 años de edad) piensan que entre 4.2 y 4.3 no hay otro decimal (Broitman, Itzcovich, y Quaranta, 2003). Por otro lado, Ávila (2008) informa que solo el 10% de los estudiantes de la educación primaria responde correctamente ejercicios vinculados con esta propiedad en los exámenes nacionales en México.

Concluida la educación básica primaria los estudiantes siguen teniendo un pensamiento concerniente con la propiedad de lo discreto del conjunto de los números naturales durante la educación básica secundaria. Como prueba de ello se encuentra la investigación forjada por Neuman (1998) en la que él expone que estudiantes alemanes, de 7° de la educación elemental (13 años de edad), asociaron propiedades afines con los números naturales para resolver preguntas relacionadas con la densidad de fracciones. Hart, en el año 1981 (como se citó en Widjaja, Stacey, y Steinle, 2008), afirmó que entre el 22% y el 39% de los estudiantes de 12 a 15 años de edad pensaban que había ocho, nueve o diez números decimales entre 0,41 y 0,42 (por ejemplo, los nueve números

decimales del orden de los milésimos: 0.411, 0.412, 0.413, 0.414, 0.415, 0.416, 0.417, 0.418 y 0.419).

En la última etapa escolar se encuentran los estudiantes universitarios, así como los que se preparan para ser profesores. En Estados Unidos, futuros profesores piensan que hay una cantidad finita de números intermedios en un intervalo y que un número racional tiene un sucesor (Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson, 1999). En Indonesia, la mitad de una población de profesores en formación considera una cierta cantidad de números decimales entre dos dados (Widjaja et al., 2008). Una mayoría de 62 profesores en formación y más de una décima parte de 71 estudiantes que se especializan en matemáticas a nivel universitario, en Finlandia, utilizaron propiedades correspondientes con el sistema de los números naturales en tareas asociadas con la propiedad de densidad de las fracciones (Merenlouto y Lehtinen, 2004).

Esta problemática pareciera persistir desde la escuela primaria, por ello la atención se enfocó hacia los profesores en formación de secundaria, nivel en el cual se estudia con más profundidad las propiedades de los números decimales, entre ellas la propiedad de densidad. Cabe mencionar que el presente documento es una extensión de un breve informe de investigación presentado por Suárez-Rodríguez y Figueras en el año 2019.

Objetivos

Atendiendo a la necesidad de superar la dificultad que tiene un estudiante para profesor acerca de la propiedad de densidad en el conjunto de los números decimales, se pretendió poner en marcha una secuencia didáctica (ver Suárez-Rodríguez, 2017) con la finalidad de generar una *conciencia metaconceptual*. En el proceso de cambio conceptual, el estudiante empieza a asumir una conciencia metaconceptual cuando es consciente de que sus presuposiciones y creencias son hipotéticas y limitan la forma en que interpreta la información que va aprendiendo (Vosniadou, 1994). Por tanto, para la presente investigación se plantearon los siguientes objetivos: 1. Identificar y describir los marcos explicativos –distintas formas de expresar las interpretaciones de un individuo (Vamvakoussi, Vosniadou, y Van Dooren, 2013)– que hacen los futuros profesores sobre la propiedad de densidad de los números decimales cuando tienen una conciencia metaconceptual , y 2. Analizar las actuaciones de los participantes en la resolución de las actividades en caso de que se promueva un cambio conceptual.

Marco teórico

Carey, en el año 1987, propone el enfoque de desarrollo-cognitivo del Cambio Conceptual, en el que ella explica cómo actúa la cognición infantil y desarrolla alternativas para iniciar un proceso de cambio conceptual. La autora señala que el conocimiento de un concepto de un individuo, inicialmente, está ligado a una *teoría ingenua* (aquella que consiste en explicaciones de concepciones innatas o concepciones aprendidas de la experiencia cotidiana relacionadas con las ciencias). Un ejemplo de una teoría ingenua, o idea ingenua, en matemáticas, es aquella en la que el estudiante cree que solo hay 9 números entre 1.2 y 1.3, a saber: 1.21, 1.22, …, 1.29 (Suárez-Rodríguez, 2017). Luego de que el conocimiento esté asociado con teorías ingenuas, este se va relacionando con otros formando un sistema de conocimientos (Carey, 1987).

Vosniadou (1994) propone que las teorías ingenuas constituyen los *modelos mentales* del ser humano y que estos modelos son el primer paso para iniciar un proceso de cambio conceptual. Para Vosniadou, un modelo mental es una representación que forma el alumno sobre ideas que adquiere, bien sea por experiencia o por instrucción, y que va acompañada de presuposiciones. Cuando un estudiante asume una conciencia metaconceptual estos modelos van cambiando, se producen los *modelos sintéticos*, que representan los intentos que hace el estudiante para reconciliar las opiniones científicas culturalmente aceptadas con las presuposiciones de sus teorías ingenuas

(Vosniadou,1994). Finalmente, el cambio conceptual requiere de cambios en las presuposiciones y creencias que el aprendiz debe realizar en sus representaciones para que pueda acceder a los *conceptos científicos*, y así lograr una comprensión de los conceptos aprendidos (Vosniadou, 1994; Vosniadou, Vamvakoussi, y Skopeliti, 2008).

En el ámbito educativo de las matemáticas, Stafylidou y Vosniadou (2004) y Vosniadou y Verschaffel (2004) suelen usar marcos explicativos en lugar de modelos mentales o modelos sintéticos. Los primeros marcos explicativos que hace el alumno son las primeras reflexiones que forman una estructura coherente y sólida sobre lo que aprende junto con sus presuposiciones y creencias (Vosniadou y Verschaffel, 2004). Siguiendo la idea a estos investigadores, se puede decir que los marcos explicativos iniciales son los primeros pensamientos que hace un estudiante acerca de lo que percibe, de lo que ve, de lo que interpreta, y lo explica a su manera, con sus propias palabras. Así mismo, en el contexto de un proceso de aprendizaje, la expresión cambio conceptual es un proceso de reestructuración de conceptos cuando el estudiante está aprendiendo información que no es compatible con sus conocimientos construidos hasta el momento, por lo que el estudiante debe realizar una resignificación de conceptos. Es así como la comprensión de la propiedad de densidad conlleva un proceso de cambio conceptual, de manera paulatina, una reestructuración de "lo discreto" a "lo denso", como lo sostienen Suárez-Rodríguez y Figueras (2019).

Un cambio conceptual: la reestructuración de lo discreto a lo denso

Los autores Ni y Zhou (2005) en su investigación señalan tres posibles causas que hacen que el alumno tenga conflictos para responder tareas asociadas con los números racionales cuando usan conocimientos acerca del número natural. Una primera causa se relaciona con lo innato, es decir, si la propiedad de lo discreto del conjunto de los números naturales es de naturaleza innata. La segunda se relaciona con la enseñanza de las propiedades del conjunto de los números naturales y la del conjunto de los números racionales. Por último, la relación entre el aprendizaje de los conceptos que el niño adquiere y el aprendizaje de la simbología de dichos conceptos. Ante esto, Vamvakoussi y Vosniadou (2012) diseñaron una estrategia usando la analogía entre el estiramiento de una "liga elástica" y la propiedad de densidad. El alumno a medida que estira la liga observa que hay más espacio entre "dos puntos que están dibujados", por ende, hay más "puntos imaginarios". Efectivamente, los estudiantes (entre 13 y 17 años de edad) lograron concebir una relación de semejanza entre el estiramiento de la liga y la propiedad de densidad.

En la investigación forjada por Vamvakoussi y Vosniadou, en el año 2004, se identificaron y se describieron distintos marcos explicativos concernientes a un pensamiento vinculado con cantidades finitas –o infinitas– entre dos números racionales por estudiantes que tenían entre 15 y 17 años de edad (ver Tabla 1).

Tabla 1: Caracterización del pensamiento sobre la cantidad de números en un intervalo

Pensamiento ingenuo sobre lo discreto	Se piensa que no hay otro número entre dos números racionales *consecutivos falsos*. Esta expresión la acuñaron Vamvakoussi y Vosniadou (2004) para referir que existe un sucesor de un número racional.
Pensamiento avanzado sobre lo discreto	Se cree que hay un número finito de números entre dos números racionales consecutivos falsos.
Pensamiento compuesto entre lo discreto y lo denso	En algunos casos se piensa que entre dos números racionales hay una cantidad infinita de números, y en otros, que hay un número finito de números intermedios.
Pensamiento ingenuo sobre lo denso	Se comprende que hay una infinidad de números en un intervalo, pero no se justifica la situación usando la propiedad de densidad. La representación simbólica de los extremos de un intervalo influye en la forma de pensar; se cree que sólo puede haber una infinidad de números decimales entre decimales y una infinidad de fracciones entre fracciones, pero no una infinidad de fracciones entre decimales, o al contrario.

Pensamiento avanzado sobre lo denso	Hay una comprensión bastante sofisticada de la propiedad de densidad, es decir, se pone de manifiesto que se entiende que entre dos números racionales hay una infinidad de números independientemente de su representación simbólica, y se justifica con la propiedad de la densidad.

Metodología

Participantes

La población estudiada fue de 10 profesores en formación en matemáticas de la educación básica secundaria de una institución en la Ciudad de México, en el año 2017. Uno de estos participantes tenía 36 años de edad y los nueve restantes entre 18 y 23.

Diseño de la experimentación educativa

La puesta en marcha de la secuencia didáctica con los profesores en formación se centró en una finalidad: generar conciencia metaconceptual. Vamvakoussi y colegas (2013) indican que el cambio conceptual a través de una instrucción es un proceso lento y gradual, porque no solo involucra la reorganización de una concepción sino de todo un sistema de conocimientos. No obstante, los autores describen que se puede lograr un cambio conceptual paulatinamente con los siguientes criterios: (a) una exploración profunda de los conceptos a aprender, (b) tener en cuenta el conocimiento previo del estudiante, (c) facilitar una conciencia metaconceptual, (d) proporcionar experiencias significativas, y (e) fomentar el uso de diversas representaciones, ya sean gráficas, escritas, o hechas con recursos digitales.

Teniendo en cuenta los anteriores criterios y los antecedentes que reúnen la problemática en torno a la comprensión de la propiedad de densidad por parte del alumno, se procede al diseño y elaboración de las actividades de la secuencia didáctica. La secuencia se estructuró en dos etapas. La primera para reconocer los primeros marcos explicativos de los participantes a través de un cuestionario (diagnóstico) de papel y lápiz y entrevistas individuales. La segunda etapa se elaboró con actividades individuales y grupales para identificar y analizar sus actuaciones, a su vez, sus marcos explicativos. Esta etapa se llevó a cabo en cuatro sesiones sobre: 1. La percepción de lo denso en materiales concretos, 2. Adición y sustracción de decimales, 3. Localización de decimales en intervalos, y 4. Comparación de números decimales.

Resultados

Resultados del cuestionario como diagnóstico (primera etapa)

Los profesores en formación atendieron a un cuestionario de 11 preguntas el cual arrojó los primeros marcos explicativos relacionados con las categorías propuestas por Vamvakoussi y Vosniadou (2004) sobre la propiedad de lo discreto y la propiedad de densidad. A continuación se muestran las respuestas de varios participantes a algunas preguntas, así mismo se muestran algunas manifestaciones dadas por ellos en las entrevistas individuales con el ánimo de conocer la justificación de sus respuestas.

En Pensamiento ingenuo sobre lo discreto. Hubo estudiantes para profesor quienes consideraron que los extremos de un intervalo son consecutivos y por ello aseguraron que no puede haber otro número en dicho intervalo. En la Figura 1 se muestra el caso presentado por Amanda. Ella realizó el proceso de una representación fraccionaria a escritura decimal finita, y usó el argumento de que ambos extremos del intervalo son consecutivos.

5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta.

No porque $\frac{1}{2}$ es 0.5 el siguiente de 0.49

Amanda indica que 1/2 = 0.5 = 0.50 es el sucesor de 0.49. Ella menciona en la entrevista que "0.49 y 1/2 son consecutivos".

Figura 1: Pensamiento ingenuo sobre lo discreto (ejemplo)

En Pensamiento avanzado sobre lo discreto. El proceso de subdivisiones finitas en un intervalo fue uno de los marcos explicativos iniciales que usaron los participantes para afirmar la existencia de una cantidad finita de números decimales en un intervalo. La concepción de que solamente los números del orden de los décimos –a lo mucho de los centésimos– son los números decimales, puede estar influida en las respuestas relacionadas con conjuntos finitos dentro de un intervalo. Por ejemplo, Fabiola evoca un proceso finito, toma en cuenta una determinada cantidad de cifras decimales de un número para afirmar que hay nueve números decimales en el intervalo dado, por ende, subyace la idea de los números consecutivos falsos (ver Figura 2).

2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Si nueve

Fabiola registró que hay 9 números en el intervalo. Ella dice que solo se encuentran 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28 y 1.29 (manifestaciones en la entrevista).

Figura 2: Pensamiento avanzado sobre lo discreto (ejemplo)

Cabe mencionar que algunos profesores en formación tienen un marco explicativo inicial de que un sucesor es un número mayor que él. Posiblemente, Isabella piensa que el sucesor de cualquier número es un número mayor, como su ejemplo: naturales 7, 8 (Ver Figura 3).

9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? naturales 7, 8...

Figura 3: Creencia de la existencia de un sucesor como número mayor (ejemplo)

Para finalizar esta primera etapa de la secuencia didáctica se concluye que la mitad de los estudiantes a profesor tienden a tener un pensamiento combinado entre lo discreto y lo denso, mientras que tres, al parecer, tienen un pensamiento avanzado sobre lo discreto y los dos restantes tienden a tener un pensamiento ingenuo afín con lo discreto.

Resultados de las actividades de la secuencia didáctica (segunda etapa)

En los siguientes párrafos se describen algunas actuaciones y marcos explicativos de los profesores en formación quienes interactuaron con actividades de la secuencia didáctica.

Actuaciones vinculadas con la percepción de lo denso en materiales concretos. La finalidad de las primeras actividades de la secuencia didáctica es que el futuro profesor conciba la noción de una infinidad de números en un intervalo a través de una "infinidad de puntos" en un contexto geométrico. Ellos refirieron que entre más se estiraba la liga elástica (propuesta de Vamvakoussi y Vosniadou, 2012) podía haber más espacio, por ende, más puntos imaginables. De la misma manera sucedió con el inflamiento de un globo. Los participantes señalaron que entre más se inflaba el globo habría más espacio, en consecuencia, más puntos imaginarios.

Actuaciones identificadas con la adición y la sustracción con números decimales. Para esta segunda sesión los participantes respondieron a dos actividades que surgieron de las actividades hechas por Broitman y colaboradores (2003). El objetivo de las actividades es el reconocimiento de destrezas en la escritura de números decimales distintos. En una de las actividades la docente-investigadora escribe el número *1.5* en el pizarrón, luego los estudiantes para profesor escriben la mayor cantidad de sumandos y que la suma total se aproxime o se iguale a 10. El uso de números hasta dos cifras decimales se puso de manifiesto en esta primera experiencia por algunos participantes, por ejemplo, el marco explicativo de Karen. Ella utilizó números con dos cifras decimales, incluso tuvo en cuenta el número 0 para las centésimas, como se puede apreciar en la Figura 4. Karen únicamente anota números comprendidos entre 0 y 1. Ella primero escribe la secuencia *0.5*, *0.4*, *0.3*, y luego registra *0.25*, *0.75, 0.80* y *0.15*, es decir, descompone hasta centésimas. Enseguida ella anota *0.20*, *0.70*, *0.40* y *0.30* y reconoce que el cero puede tener la posición de las centésimas. Al parecer, ella no percibió la equivalencia entre 0.3 y 0.30, así mismo, 0.4 y 0.40, puesto que la actividad requería números diferentes.

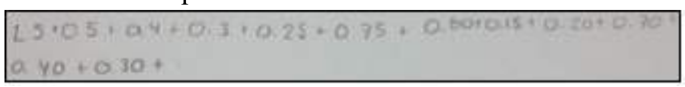

Figura 4: Registro de Karen en la actividad de adición y sustracción

El marco explicativo de Nicolás se basó en el registro de números hasta con seis cifras decimales, pero al parecer tenía una estrategia (ver Figura 5). Él anota el número *0.000001* y después *0.000009*, y en las siguientes filas va cambiando la posición del dígito 9. Nicolás ubica el 9 en la posición de las millonésimas, luego en la posición de las cienmilésimas, las diezmilésimas, las milésimas, las centésimas, y finalmente en las décimas. El proceso que realizó Nicolás fue multiplicar 9 por $1/10^n$, donde n es un número natural, comenzando por la posición de las millonésimas (es decir, $n=6$). Se observa que la suma de los números que Nicolás escribió es 1. Este participante, quien en el cuestionario-diagnóstico mostró ejemplos relacionados con el pensamiento avanzado asociado con lo discreto, utilizó números hasta millonésimos. Este hecho pone en evidencia un proceso de inicio de cambio conceptual de manera paulatina, puesto que él registró números hasta con dos cifras decimales en algunas respuestas del cuestionario.

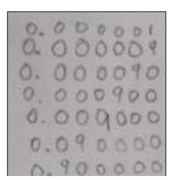

Figura 5: Registro de Nicolás en la actividad de adición y sustracción

Actuaciones identificadas con la localización de números decimales en intervalos. Las dos actividades de esta sesión se elaboraron a partir de una hecha por Brousseau (1981) que tienen la intención de localizar números en un intervalo, así como encontrar intervalos para un número dado. En una de las actividades los futuros profesores deben buscar el intervalo en el que se halla el número "pensado" por un compañero y van elaborando preguntas con el fin de encontrar dicho intervalo. Los extremos de este intervalo deben ser números cuyas cifras decimales sean consecutivas. En la Figura 6 se muestra un ejemplo de un participante quien escribió los intervalos mencionados por sus compañeros e iba marcando con una "equis" cuáles no correspondían. La representación numérica hasta los diezmilésimos en el número escondido, 28.9306, fue tomada en cuenta por Olga. Ella había mostrado evidencias de un pensamiento ingenuo concerniente con lo discreto en el desarrollo del cuestionario-diagnóstico. Olga, al parecer, ha estado haciendo una reestructuración de conceptos, pues ella creía que solo existían números hasta con dos cifras

decimales. Es posible que ella haya usado la representación numérica del orden de los diezmilésimos como consecuencia de la socialización de las actividades anteriores (relacionadas con adiciones y sustracciones).

Actuaciones asociadas con la comparación de números decimales. Las dos actividades de comparación, de la última sesión de la secuencia didáctica, se derivaron de una tarea hecha por un estudiante para profesor de una investigación realizada por Castillo en el año 2015, en México. La comprensión de la propiedad de densidad de los decimales a partir de la propiedad de comparación de decimales constituye el propósito de las actividades. En una de ellas, cada profesor en formación debe completar una ordenación de números decimales. En la Figura 7 se evidencia la labor realizada por uno de los cinco participantes que completaron la secuencia de manera correcta. Su estrategia fue detallar los últimos dígitos de los números que aparecen allí para "modificarlos", y en otros casos, para "añadir dígitos o cifras" sin alterar la ordenación.

Algunos estudiantes para profesor no percibieron la equivalencia entre decimales, son los casos de Olga, Isabella, Oscar y Amanda (ver Figura 8). Olga agrega un cero en la posición de las diezmilésimas de la cantidad 30.871. Isabella y Olga agregaron dos ceros en las posiciones cienmilésimas y millonésimas del número 30.8712. Oscar agregó un cero en la posición de las cienmilésimas del número 30.8721. Y Amanda agregó un cero al final de la expresión 30.87125.

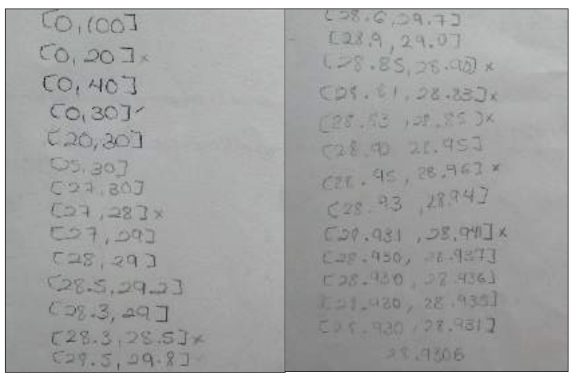

Figura 6: Registro de un profesor en formación en la actividad de localización

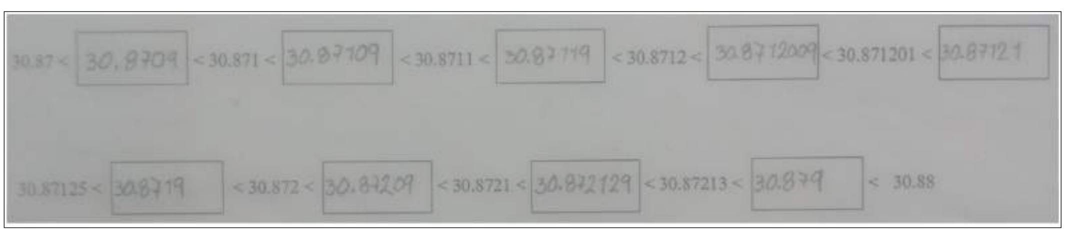

Figura 7: Registro de un futuro profesor en la actividad de comparación

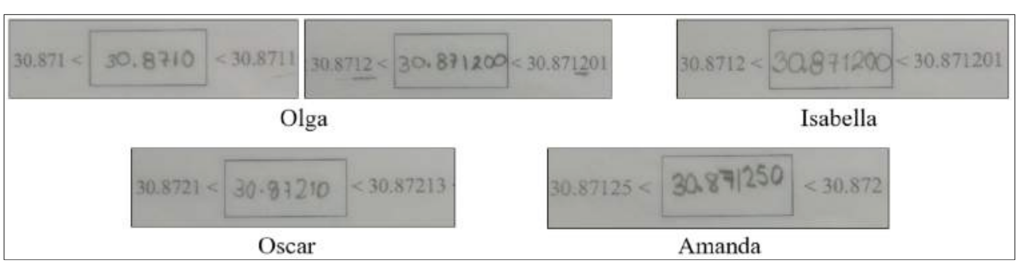

Figura 8: Registros de cuatro participantes en la actividad de comparación

Concluida la prueba individual, los futuros profesores anotaron en el pizarrón los números escritos en sus hojas de trabajo (ver Figura 9). Con el objetivo de que el estudiante para profesor lograra una conciencia metaconceptual de que la propiedad de densidad ayuda a visualizar el hecho de que no existe un sucesor en el conjunto de los números decimales, se mostró que entre pares de consecutivos falsos se halla al menos un número decimal, en consecuencia, una infinidad. Por ejemplo, en la Figura 9 (ver óvalo) se observa que entre el par de consecutivos falsos *30.8711* y *30.8712* se localizan al menos siete números decimales, mayores que el primero y menores que el segundo: *30.87112*, *30.871103*, *30.87119*, *30.871105*, *30.871102*, *30.87115* y *30.871106*. Finalmente, se cuestionó a los participantes si había otras estrategias para hallar números intermedios en esta actividad. Nicolás mencionó "la media aritmética". Se realizó un breve ejemplo con un par de números de la actividad para mostrar que con ella se puede hallar números intermedios en un intervalo.

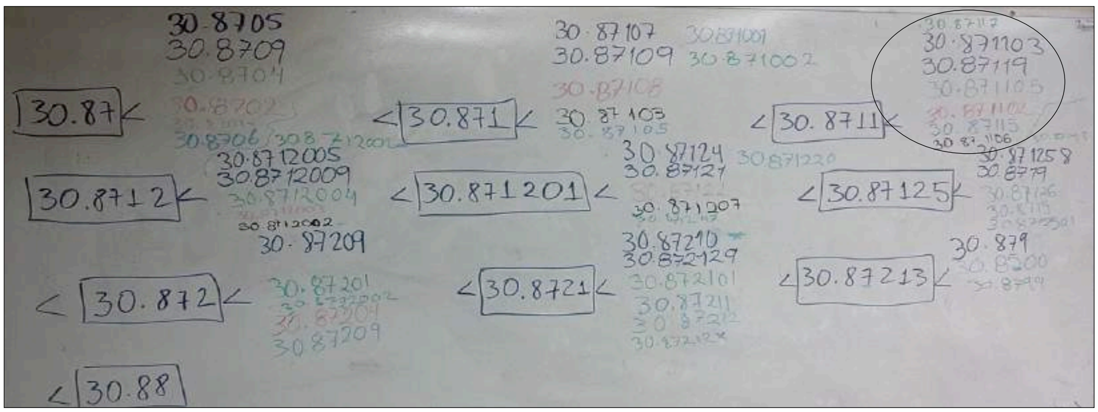

Figura 9: Anotaciones de los participantes en la actividad de comparación

Conclusiones e implicaciones

La socialización de las actividades de la secuencia didáctica con los profesores en formación promueve un acercamiento a la comprensión de la propiedad de densidad de los números decimales, en consecuencia, un proceso de cambio conceptual: de lo discreto a lo denso. En el desarrollo del cuestionario-diagnóstico, los diez profesores en formación habían evidenciado ejemplos de pensamiento asociado con la propiedad de lo discreto de los números naturales. Durante la puesta en marcha de las actividades de la secuencia didáctica, los diez participantes lograron extender la cantidad de cifras decimales, estrategia que les permitió ubicar números en un intervalo. Sin embargo, la mediación sobre la existencia de un sucesor de un decimal fue cuestionada por tres profesores en formación, ellos aun incluían en su marco explicativo la existencia de un sucesor de un número decimal como un número mayor.

Se considera que el desarrollo de la escritura de una expansión decimal de un número es una tarea que posiblemente puede ayudar al profesor en formación, o a un estudiante en general, en la comprensión del concepto de series. Las sumas de progresiones aritméticas o geométricas con infinitos términos son ejemplos de series. Un número con escritura decimal periódica expresa una aproximación de un número racional, que es el valor límite de dicho racional, por ejemplo, el valor límite de la expansión decimal 0.0123123123… es 41/3330. De igual manera, el desarrollo de la escritura de expansiones decimales infinitas que no se pueden expresar como fracción podría ayudar al estudiante en la comprensión del concepto de número irracional. Finalmente, como lo indican Suárez-Rodríguez y Figueras (2019), la secuencia didáctica es un ejemplo de un modelo de enseñanza que puede ser de interés para profesores en servicio quienes podrían iniciar el estudio de la propiedad de densidad en sus aulas de clases.

Agradecimientos

El proyecto de investigación fue financiado por Conacyt y Cinvestav. Un agradecimiento especial a los maestros en formación que participaron voluntariamente en la secuencia didáctica.

Referencias

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Matemática Educativa, 20*(2), 5-33.

Broitman, C., Itzcovich, H., & Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime*, *6*(1), 5-26.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds. and Trads.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (pp. 149-222).

Carey, S. (1987). *Conceptual change in childhood.* Cambridge, MA: MIT Press.

Castillo, G. (2015). *Concepciones que ponen en juego los docentes en formación cuando planifican sus clases* (Tesis de maestría inédita). Cinvestav, México.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction*, *14*, 519-534.

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Törner, & B. Wollring (Eds), *Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104). Recuperado de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*, 27-52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503-518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Suárez-Rodríguez, M. (2017). *Acercamientos a la propiedad de densidad de los números decimales: Un estudio con profesores en formación* (Tesis de maestría inédita). Cinvestav, México.

Suárez-Rodríguez, M. & Figueras, O. (2019). Towards a conceptualization of the density property of decimal numbers: a study with teachers in training. In S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the Forty-First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 741-745). St Louis, MO: University of Missouri.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Recuperado de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265-284.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., & Van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 305-321). New York: Routledge.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction, 4*, 45-69.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*, 445-451.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Widjaja, K., Stacey, K., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from Indonesian pre-service teachers. *Journal of Science and Mathematics. Education in Southeast Asia*, *31*(2), 117-131.